模块一 同角三角函数关系与诱导公式

第 1 节 三角函数的定义（★☆）

内容提要

若题干给出角的终边上某点的坐标，或给出角的终边所在直线的方程，考虑用三角函数定义求三角函数值，有下面两种等价的定义方法：

1．如图 1，设 $P(x,y)$ 为角 α 终边与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的交点，则 $\sin\alpha=y$， $\cos\alpha=x$， $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

2．如图 2，设 $P(x,y)$ 为角 α 终边上一点， $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$， $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$， $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$.

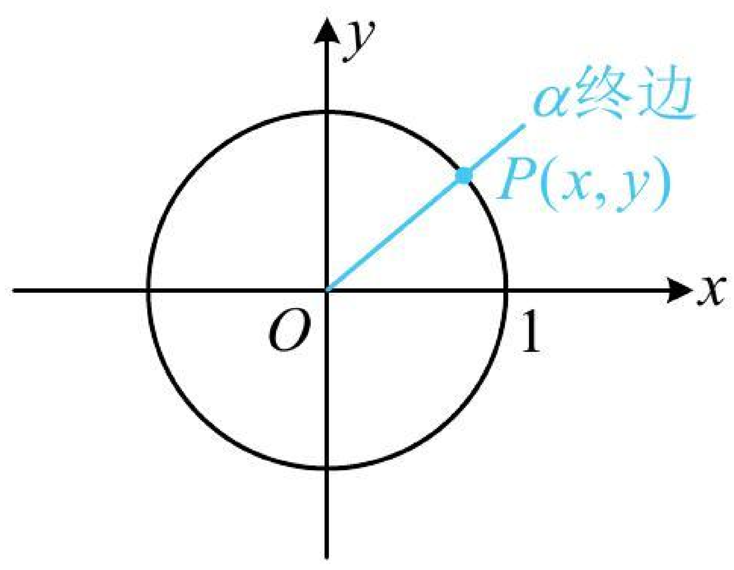


图1

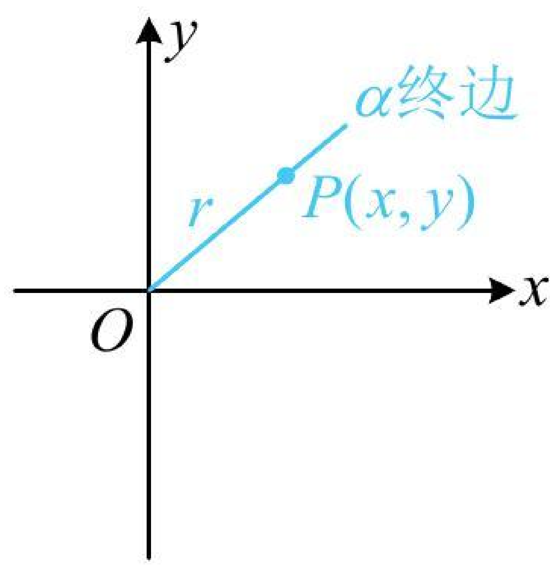


图2

典型例题

【例 1】已知角 α 的终边经过点 $P(3,-4)$，则 $\cos\alpha=$（　　）

（A） $-\dfrac{4}{5}$　　（B） $-\dfrac{3}{5}$　　（C） $\dfrac{4}{5}$　　（D） $\dfrac{3}{5}$

解析：由题意， $r=|OP|=5$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3}{5}$.

答案：D

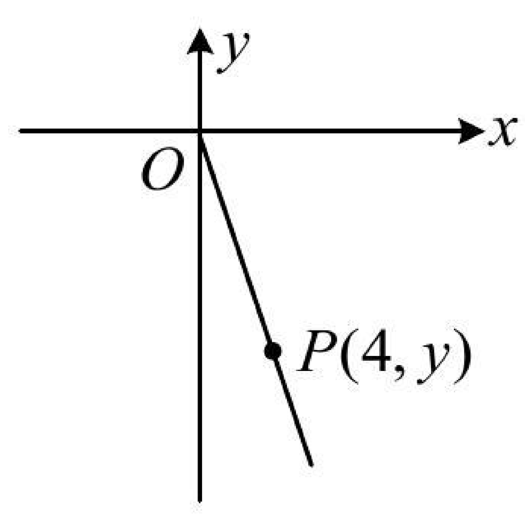
【变式 1】角 θ 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴的非负半轴，若 $P(4,y)$ 是角 θ 终边上一点，且 $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $y=$_____.

解析：给出角终边上的一点的坐标，联想到三角函数的定义，所以先用定义计算 $\sin\theta$，

如图， $\sin\theta=\dfrac{y}{|OP|}=\dfrac{y}{\sqrt{16+y^2}}$，又 $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\dfrac{y}{\sqrt{16+y^2}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

由上式可看出 $y<0$，平方后可求得 $y=-8$.

答案： -8



【变式 2】已知角 α 的终边经过点 $P(\sin 47^{\circ},\cos 47^{\circ})$，则 $\sin(\alpha-13^{\circ})=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$-\dfrac{1}{2}$　　（D）$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解法 1：给出角终边上的一点的坐标，联想到三角函数的定义，先用定义计算 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，

因为 $|OP|=\sqrt{\sin^2 47^{\circ}+\cos^2 47^{\circ}}=1$，所以 P 是 α 的终边与单位圆的交点，故 $\sin\alpha=\cos 47^{\circ}$，$\cos\alpha=\sin 47^{\circ}$，

所以 $\sin(\alpha-13^{\circ})=\sin\alpha\cos 13^{\circ}-\cos\alpha\sin 13^{\circ}=\cos 47^{\circ}\cos 13^{\circ}-\sin 47^{\circ}\sin 13^{\circ}=\cos(47^{\circ}+13^{\circ})=\cos 60^{\circ}=\dfrac{1}{2}$.

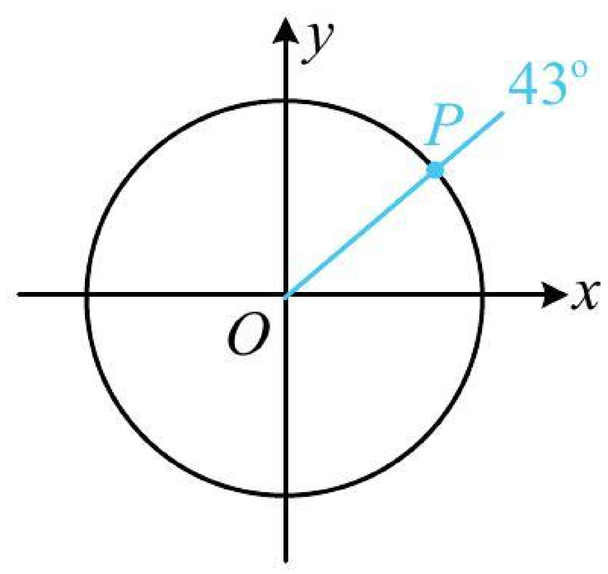
解法 2：将所给的点 P 的坐标用诱导公式转换成三角函数定义的格式 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，可直接求出 α，

因为 $\sin 47^{\circ}=\sin(90^{\circ}-43^{\circ})=\cos 43^{\circ}$，$\cos 47^{\circ}=\cos(90^{\circ}-43^{\circ})=\sin 43^{\circ}$，

所以点 P 的坐标可化为 $(\cos 43^{\circ},\sin 43^{\circ})$，如图，结合三角函数定义可得 α 的终边与 43°的终边重合，

从而 $\alpha=k\cdot 360^{\circ}+43^{\circ}(k\in\mathbf{Z})$，故 $\sin(\alpha-13^{\circ})=\sin(k\cdot 360^{\circ}+43^{\circ}-13^{\circ})=\sin 30^{\circ}=\dfrac{1}{2}$.

答案：A



【反思】①当终边上的点的坐标是三角形式时，应先将其化为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 这种标准格式，才能用三角函数的定义；②已知终边位置时，需注意终边相同的角可以相差 $2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

【例 2】质点 P 和 Q 在以坐标原点 O 为圆心，1 为半径的圆 O 上逆时针作匀速圆周运动，同时出发. P 的角速度大小为 2rad/s，起点为圆 O 与 x 轴正半轴的交点，Q 的角速度大小为 4rad/s，起点为射线 $y=-\sqrt{3}x(x\ge 0)$ 与圆 O 的交点，则当 P 与 Q 重合时，Q 的坐标为_____.

解析：P，Q 重合即射线 OP 和射线 OQ 重合，可看成角的终边重合，先把以 OP，OQ 为终边的角写出来，

设在时刻 t（单位：s），以 OP，OQ 为终边的角分别为 α，β，则 $\alpha=2t$，

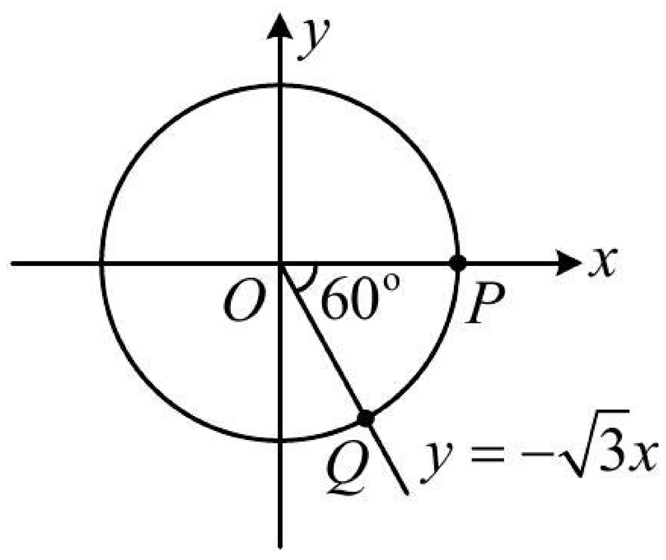
如图，射线 $y=-\sqrt{3}x(x\ge 0)$ 可看成角 $-\dfrac{\pi}{3}$ 的终边，所以 $\beta=-\dfrac{\pi}{3}+4t$　①，

从而当 P 与 Q 重合时，应有 $\beta=\alpha+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $-\dfrac{\pi}{3}+4t=2t+2k\pi$，故 $t=k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，

代入①得：$\beta=-\dfrac{\pi}{3}+4k\pi+\dfrac{2\pi}{3}=4k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，点 Q 即为 β 与单位圆的交点，可用三角函数定义求其坐标，

所以 $x_Q=\cos\beta=\cos(4k\pi+\dfrac{\pi}{3})=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$y_Q=\sin(4k\pi+\dfrac{\pi}{3})=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故点 Q 的坐标为 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

答案：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$



强化训练

1．（2022 • 宁夏模拟 • ★）已知角θ的终边上有一点$P(-4a,3a)(a>0)$，则$2\sin\theta+\cos\theta=$（　　）

（A）$-\frac{2}{5}$　（B）$\frac{2}{5}$　（C）$-\frac{2}{5}$或$\frac{2}{5}$　（D）不确定

2．（2022 • 安徽模拟 • ★）已知角α终边上一点$P(m,4)(m\neq0)$，且$\cos\alpha=\frac{m}{5}$，则$\tan\alpha=$_____.

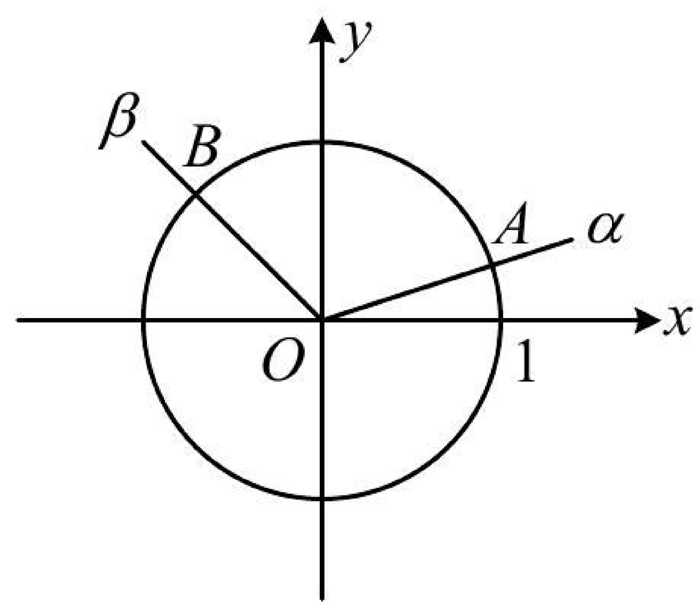
3．（★）已知$\tan\alpha=k$，且α在第三象限，则$\sin\alpha=$_____.（用k表示）

4．（2022 •潍坊二模 •★★）已知角α的顶点为坐标原点，始边与x轴的非负半轴重合，点$A(x_1,2)$，$B(x_2,4)$在α的终边上，且$x_1-x_2=1$，则$\tan\alpha=$（　　）

（A）2　（B）$\frac{1}{2}$　（C）-2　（D）$-\frac{1}{2}$

5.（2022 • 湛江期末 • ★★★）如图，角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于点 $A(x_1, y_1)$，角 $\beta=\alpha+\frac{2\pi}{3}$ 的始边与角 α 的始边重合，且终边与单位圆交于点 $B(x_2, y_2)$，记 $f(\alpha)=y_1-y_2$，若 α 为锐角，则 $f(\alpha)$ 的取值范围是（　）

（A）$(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　（B）$(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$　（C）$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　（D）$(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$



6.（2021 • 北京卷 • ★★★）若点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$ 关于 y 轴的对称点为 $B(\cos(\theta+\frac{\pi}{6}),\sin(\theta+\frac{\pi}{6}))$，写出 θ 的一个取值为______.

7.（2022 • • ★★★）已知角 α 的始边与 x 轴非负半轴重合，终边上一点 $P(\sin 3,\cos 3)$，若 $0\le\alpha\le 2\pi$，则 $\alpha=$（　）

（A）3　（B）$\frac{\pi}{2}-3$　（C）$\frac{5\pi}{2}-3$　（D）$3-\frac{\pi}{2}$